Laboratorium Podstaw Pomiarów

Podstawy Elektroniki i Pomiarów 1 – laboratorium

Ćwiczenie T3

Prawa obwodowe

Instrukcja

Opracował:

dr hab. inż. Grzegorz Pankanin, prof. uczelni

Instytut Systemów Elektronicznych
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych

Warszawa 2022

v. 1.2
(31.01.2023)

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój

Politechnika Warszawska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Ćwiczenie T3

Prawa obwodowe

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest pogłębienie wiedzy w zakresie metod analizy obwodów liniowych prądu stałego.

2. Tematyka ćwiczenia

- prawa Kirchhoffa,
- twierdzenie Thevenina,
- twierdzenie Nortona,
- zasada superpozycji,
- dopasowanie energetyczne dla prądu stałego.

3. Umiejętności zdobywane przez studentów

- umiejętność wyznaczenia elementów schematu zastępczego obwodu liniowego z wykorzystaniem twierdzenia Thevenina,
- umiejętność wyznaczenia elementów schematu zastępczego obwodu liniowego z wykorzystaniem twierdzenia Nortona,
- umiejętność praktycznego zastosowania II prawa Kirchhoffa,
- umiejętność praktycznego zastosowania metody superpozycji,
- umiejętność wyznaczenia zależności mocy wydzielanej w obciążeniu od rezystancji obciążenia.

4. Podstawy teoretyczne

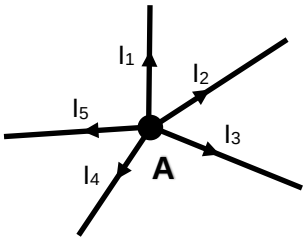
4.1. Prawa Kirchhoffa

4.1.1. I prawo Kirchhoffa (prądowe)

I prawo Kirchhoffa, nazywane również prawem prądowym, mówi o tym, że ***algebraiczna suma prądów w węźle jest równa zeru*** – lub inaczej formułując – ***suma prądów dopływających do węzła jest równa sumie prądów z niego wypływających.***

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \tag{3-1}$$

Można to przedstawić schematycznie jak na Rys. 3.1.



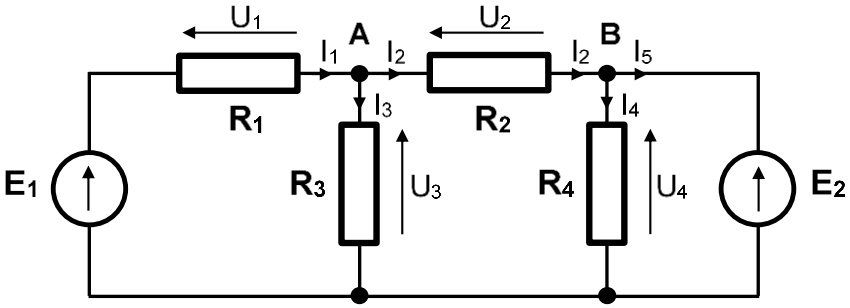
$$\sum_{k=1}^{5} I_k = 0$$

Rys. 3.1. I prawo Kirchhoffa

Dla przykładowego układu z Rys. 3.2 dla wybranych węzłów A i B można napisać następujące równania:

A: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ stąd $I_1 = I_2 + I_3$

B: $I_2 - I_4 - I_5 = 0$ stąd $I_2 = I_4 + I_5$



Rys. 3.2. Schemat ideowy przykładowego układu

4.1.2. II prawo Kirchhoffa (napięciowe)

II prawo Kirchhoffa, nazywane również napięciowym, mówi o tym, że ***algebraiczna suma napięć w obwodzie zamkniętym jest równa zeru.***

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = 0 \tag{3-2}$$

Dla układu z Rys. 3.2 można napisać:

1^0 dla obwodu zawierającego źródło E_1 oraz rezystory R_1 i R_3

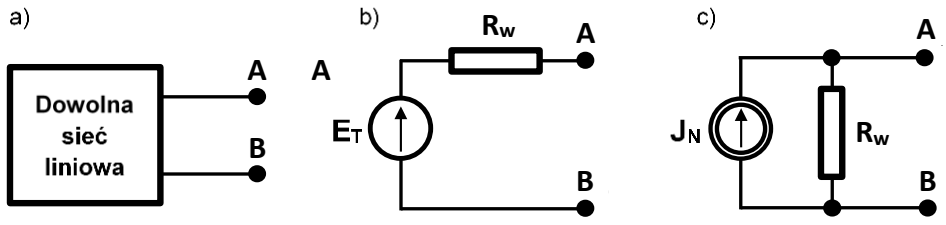
$E_1 - U_1 - U_3 = 0$ stąd $E_1 = U_1 + U_3$

2^0 dla obwodu zawierającego rezystory R2, R3 i R4

$U_3 - U_2 - U_4 = 0$ stąd $U_3 = U_2 + U_4$

4.2. Zasada Thevenina-Nortona

Definicja: ***Dla dowolnej pary zacisków, dowolny układ liniowy można zastąpić źródłem zastępczym napięciowym bądź prądowym*** (Rys. 3.3).



Rys. 3.3. Zasada Thevenina-Nortona

4.2.1. Twierdzenie Thevenina

Dowolny dwójnik liniowy jest równoważny zaciskowo rzeczywistemu źródłu napięciowemu.

Aby określić parametry źródła zastępczego postępujemy następująco:

- **wyznaczamy opór zastępczy R_w**

  Usuwamy z dwójnika źródła niezależne (napięciowe zwieramy, prądowe rozwieramy). Wyznaczamy opór powstałego dwójnika bezźródłowego.

- **wyznaczamy zastępczą siłę elektromotoryczną E_T**

  Rozwieramy zaciski dwójnika i wyznaczamy na nich napięcie U_0.

4.2.2. Twierdzenie Nortona

Dowolny dwójnik liniowy jest równoważny zaciskowo rzeczywistemu źródłu prądowemu.

W celu określenia parametrów źródła zastępczego:

- **wyznaczamy opór zastępczy R_w**

  Postępujemy identycznie jak w twierdzeniu Thevenina.

- **wyznaczamy zastępczą wydajność prądową J_N**

  Zwieramy zaciski dwójnika i wyznaczamy prąd zwarciowy I_z. Zastępcza wydajność prądowa J_N jest równa prądowi zwarciowemu I_z.

4.3. Zasada superpozycji

Zasada superpozycji polega na wyznaczeniu w obwodzie prądów i napięć wywołanych przez poszczególne źródła energii działające pojedynczo i następnym ich zsumowaniu. W ten sposób można wyznaczyć wartości prądów i napięć w obwodzie, w którym istnieje wiele źródeł napięciowych bądź prądowych.

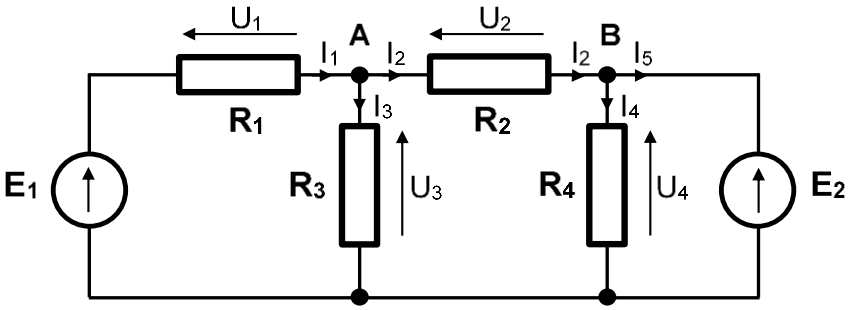
Prąd w dowolnej gałęzi obwodu przy działaniu wszystkich źródeł energii jest sumą algebraiczną wszystkich prądów, które płyną na skutek działania każdego źródła energii z osobna.

$$I_k = \sum_{i=1}^{n} I_k^{(i)} \tag{3-3}$$

Napięcie panujące na dowolnym elemencie obwodu przy działaniu wszystkich źródeł energii jest sumą algebraiczną wszystkich napięć, które występują na skutek działania każdego źródła energii z osobna.

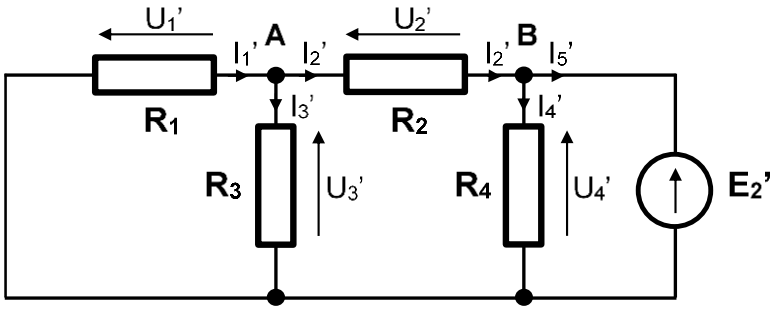
$$U_k = \sum_{i=1}^{n} U_k^{(i)} \tag{3-4}$$

Rozpatrzmy przykładowy obwód elektryczny przedstawiony na Rys. 3.4.



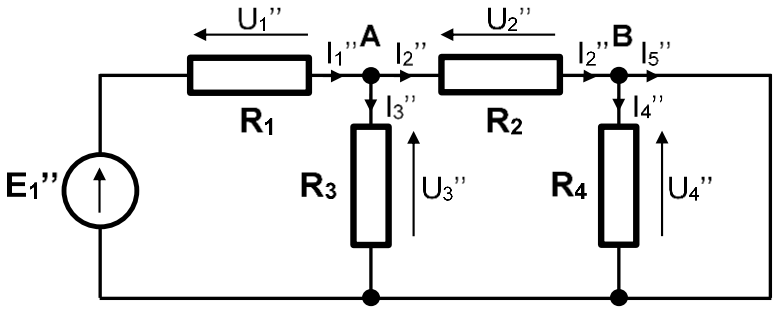
Rys. 3.4. Konfiguracja układu z zaznaczonymi prądami i napięciami

1⁰. W pierwszym kroku (Rys. 3.5) źródło **E₁** zastępujemy zwarciem i wyznaczamy (bądź mierzymy) napięcia U_1', U_2', U_3', U_4', E_2' oraz prądy I_1', I_2', I_3', I_4', I_5'.



Rys. 3.5. Konfiguracja układu do pierwszego kroku w metodzie superpozycji

2^0. W drugim kroku (Rys. 3.6) przywracamy źródło $\mathbf{E_1}$, a źródło $\mathbf{E_2}$ zastępujemy zwarciem. Wyznaczamy napięcia U_1'', U_2'', U_3'', U_4'', E_1'' oraz prądy I_1'', I_2'', I_3'', I_4'', I_5''.



Rys. 3.6. Konfiguracja układu do drugiego kroku w metodzie superpozycji

3^0. Finalnie, dla każdego napięcia i prądu dodajemy wartości wyznaczone w kroku 1^0 i 2^0:

$$U_k = U_k' + U_k''$$

oraz

$$I_k = I_k' + I_k''$$

Oczywiście liczba kroków zależy od liczby niezależnych źródeł w układzie.

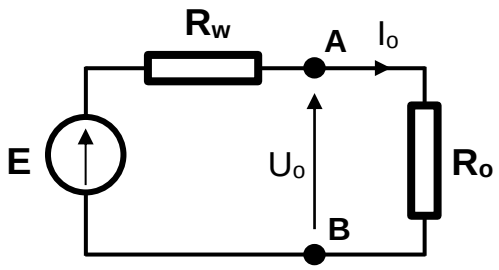
4.4. Dopasowanie energetyczne w obwodach prądu stałego

Dopasowanie energetyczne w obwodach prądu stałego oznacza zapewnienie warunków umożliwiających przekazanie maksymalnej mocy ze źródła do obciążenia.

W praktyce dopasowanie energetyczne uzyskuje się, gdy spełniony jest warunek

$$R_{obc} = R_w \tag{3-5}$$

gdzie R_{obc} oznacza rezystancję obciążenia, a R_w – rezystancję wewnętrzną źródła.



Rys. 3.7. Obciążone źródło rzeczywiste

Na Rys. 3.7 przedstawiono źródło rzeczywiste o wartości siły elektromotorycznej E i rezystancji wewnętrznej R_w obciążone rezystancją R_o. Moc wydzielana w obciążeniu wyraża się zależnością

$$P = U_o \cdot I_o \tag{3-6}$$

Napięcie U_o określa wzór

$$U_o = \frac{E}{R_w + R_o} \cdot R_o \tag{3-7}$$

a prąd I_o

$$I_o = \frac{E}{R_w + R_o} \tag{3-8}$$

W efekcie moc P wydzielana w obciążeniu jest równa

$$P = \frac{E^2}{(R_w + R_o)^2} \cdot R_o \tag{3-9}$$

Szukamy warunku na R_o, przy spełnieniu którego moc P osiąga maksimum. W tym celu należy znaleźć pochodną funkcji po R_o i przyrównać ją do zera.

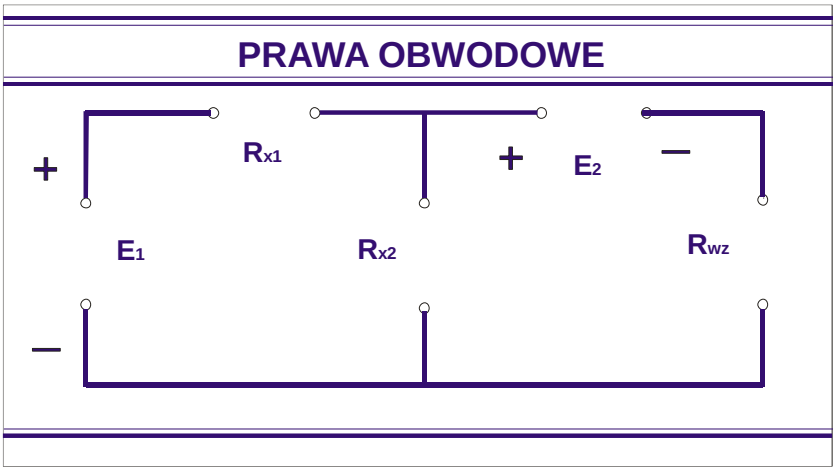
Finalnie otrzymujemy warunek

$$R_o = R_w \tag{3-10}$$

Wyprowadzenie tej zależności pozostawiamy dociekliwości studentów.

5. Moduł pomiarowy R01

W ćwiczeniu będzie wykorzystywany moduł **R01** ze specjalnie zaprojektowaną nakładką ułatwiającą montaż układów pomiarowych.



Rys. 3.8. Płyta czołowa modułu pomiarowego R01

Zaciski **E_1 i E_2** są przeznaczone do dołączenia źródeł napięcia – powinny być połączone z odpowiednimi wyjściami zasilacza **E3646A**. Należy zwrócić uwagę na biegunowość dołączenia źródeł.

Opisy na płycie czołowej są zgodne z konfiguracją większości eksperymentów, chociaż w niektórych z nich można dołączyć elementy w sposób odmienny.

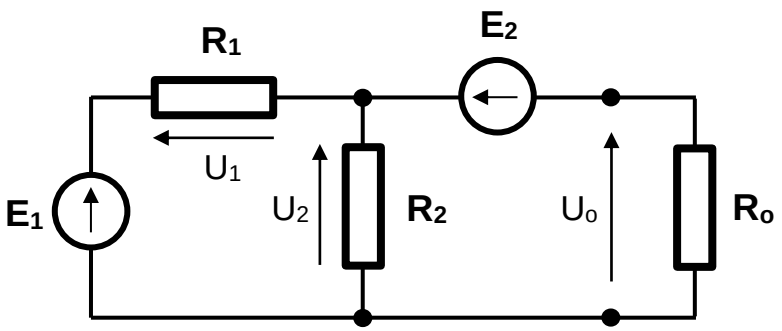
Uwaga:
*Pomiary napięć za pomocą multimetru **34450A** na poszczególnych elementach układu należy dokonywać wykorzystując specjalne poprzeczne otwory znajdujące się we wtyczkach bananowych.*

6. Badania i pomiary

Studenci w czasie ćwiczenia mają do dyspozycji:

- zasilacz stabilizowany dwukanałowy **E3646A**,
- multimetr **34450A**,
- opornik dekadowy **OD-1-M6b**,
- opornik wzorcowy **100 Ω,**
- oporniki na podstawkach **R_{x1} i R_{x2}**.

Schemat układu pomiarowego do zadań 2-4 został przedstawiony na Rys. 3.9.



Rys. 3.9. Układ połączeń do zadań 2-4.

Zadanie 1. Obliczenie parametrów obwodu zastępczego.

☞ Zmierzyć multimetrem **34450A** wartości rezystancji oporników **R_{x1}** i **R_{x2}**.

☞ Korzystając z wyników zadania domowego 1 obliczyć wartość zastępczej siły elektromotorycznej E_T, rezystancji wewnętrznej R_w i napięcia U_o panującego na rezystancji obciążenia R_o = 100 Ω. Wartości E_1 i E_2 poda Prowadzący.

☞ Korzystając z wyników zadania domowego 2 obliczyć wartość zastępczej wydajności prądowej J_N, rezystancji wewnętrznej R_w i napięcia U_o panującego na rezystancji obciążenia R_o = 100 Ω dla tych samych wartości E_1 i E_2.

Zadanie 2. Weryfikacja II Prawa Kirchhoffa.

- Na wyjściach **WY1** i **WY2** zasilacza **E3646A** ustawić napięcia E_1 i E_2 z **Zadania 1**. Dla obu kanałów ustawić ograniczenie prądowe $\boldsymbol{I_{ogr}}$ **= 100 mA.**
- Korzystając z modułu **R01** połączyć układ zgodnie ze schematem z Rys. 3.9. Jako elementy $\mathbf{R_1}$ i $\mathbf{R_2}$ wykorzystać odpowiednio rezystory $\mathbf{R_{x1}}$ i $\mathbf{R_{x2}}$. Jako obciążenie wykorzystać rezystor czterozaciskowy $\mathbf{R_{wz}}$ o wartości 100 Ω.
- Multimetrem **34450A** zmierzyć napięcia na poszczególnych elementach obwodu (rezystorach i źródłach). Wyniki zamieścić w tabeli.
- Napisać równania Kirchhoffa dla wszystkich trzech dróg zamkniętych w obwodzie i zmierzone wartości napięć podstawić do równań.

! ***Skomentować uzyskane wyniki.***

Zadanie 3. Zasada superpozycji.

- **Zad. 3.1.** Odłączyć przewody od **Wyjścia 1** zasilacza. Zaciski $\mathbf{E_1}$ na module R01 zewrzeć przewodem. Zmierzyć napięcia na wszystkich elementach obwodu. Wyniki zamieścić w tabeli.
- **Zad. 3.2.** Dołączyć **Wyjście 1** zasilacza do obwodu. Odłączyć przewody od **Wyjścia 2** zasilacza, zastępując powstałą przerwę w obwodzie zwarciem. Zmierzyć napięcia na wszystkich elementach obwodu. Wyniki zamieścić w tabeli.
- **Zad. 3.3.** Dodać wartości napięć uzyskane w **Zad. 3.1** i **Zad. 3.2** dla każdego z elementów.

! ***Wyniki uzyskane w Zadaniu 2 i Zadaniu 3 zestawić w tabeli. Skomentować ew. różnice.***

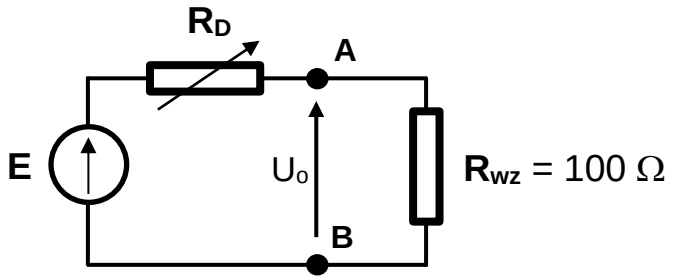
Zadanie 4. Dopasowanie energetyczne dla prądu stałego.

- W układzie z **Zadania 2** zastąpić rezystor wzorcowy o wartości **100 Ω** opornikiem dekadowym.
- Na oporniku dekadowym kolejno ustawiać wartości: $10R_w$, $5R_w$, $3R_w$, $2R_w$, $1{,}25R_w$, R_w, $0{,}9R_w$, $0{,}8R_w$, $0{,}5R_w$, $0{,}3R_w$, $0{,}1R_w$ (R_w – rezystancja źródła wyznaczona w **Zadaniu 1** z twierdzenia Thevenina).
- Multimetrem **34450A** zmierzyć napięcie U_o na oporniku dekadowym. Obliczyć moc wydzielaną w obciążeniu dla każdego pomiaru.Wyniki zamieścić w tabeli.
- Narysować wykres $P = f\,(R_D)$.

! ***Skomentować wyniki pod kątem dopasowania energetycznego.***

Zadanie 5. Weryfikacja twierdzenia Thevenina.

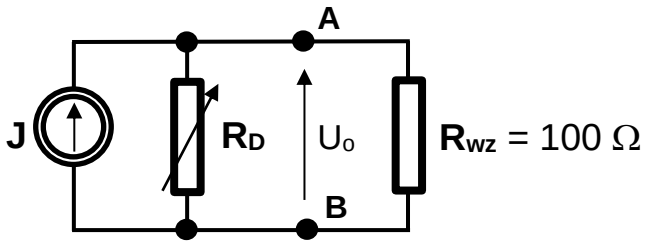
- Połączyć układ zgodnie ze schematem przedstawionym na Rys. 3.10.
- Na **Wyjściu 2** zasilacza **3646A** ustawić wartość napięcia odpowiadającą zastępczej sile elektromotorycznej E_T obliczonej w **Zadaniu 1**, a na oporniku dekadowym ustawić obliczoną wartość R_w.
- Multimetrem **34450A** zmierzyć napięcie U_o na obciążeniu.
- ***Uzyskany wynik porównać z wartością zmierzoną w Zadaniu 2.***



Rys. 3.10. Schemat układu do weryfikacji twierdzenia Thevenina.

Zadanie 6. Weryfikacja twierdzenia Nortona.

- Połączyć układ zgodnie ze schematem przedstawionym na Rys. 3.11.



Rys. 3.11. Schemat układu do weryfikacji twierdzenia Nortona.

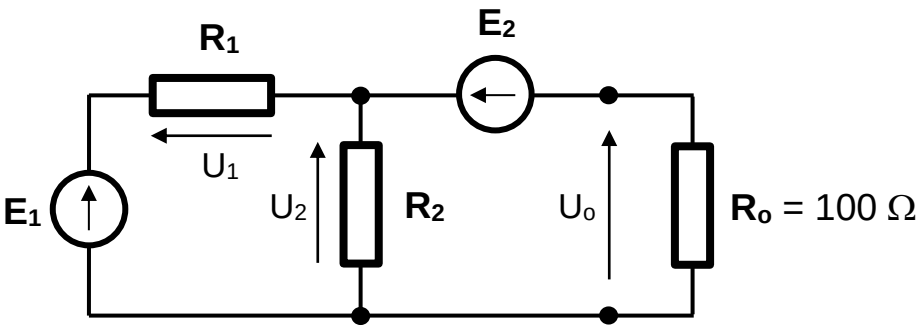
- Na **Wyjściu 2** zasilacza **3646A** ustawić wartość maksymalną wartość napięcia (20 V) oraz wartość ograniczenia prądowego równą zastępczej wydajności prądowej J_N obliczonej w **Zadaniu 1**, a na oporniku dekadowym ustawić obliczoną wartość R_w.
- Zmierzyć napięcie U_o.
- ***Zestawić w tabeli i skomentować wyniki uzyskane w Zadaniach: 1, 2, 3, 5 i 6.***

Pytania kontrolne

1. Sformułuj I prawo Kirchhoffa.
2. Sformułuj II prawo Kirchhoffa.
3. Jak brzmi twierdzenie Thevenina-Nortona? Dla jakiej klasy obwodów ma zastosowanie?
4. Opisz, w jaki sposób wyznacza się parametry źródła zastępczego w oparciu o twierdzenie Thevenina?
5. Opisz, w jaki sposób wyznacza się parametry źródła zastępczego w oparciu o twierdzenie Nortona?
6. Korzystając z twierdzenia Thevenina wyznaczono zastępczą siłę elektromotoryczną E_T = 5 V i rezystancję wewnętrzną R_w = 50 Ω. Wyznacz wartość napięcia panującego na rezystancji obciążenia R_o = 100 Ω.
7. Korzystając z twierdzenia Nortona wyznaczono zastępczą wydajność prądową J_N = 40 mA i rezystancję wewnętrzną R_w = 100 Ω. Wyznacz wartość prądu płynącego przez rezystancję obciążenia R_o = 300 Ω.
8. Korzystając z twierdzenia Thevenina wyznaczono zastępczą siłę elektromotoryczną E_T = 5 V i rezystancję wewnętrzną R_w = 50 Ω. Wyznacz wartość prądu płynącego przez oporność obciążenia R_o = 150 Ω.
9. Korzystając z twierdzenia Nortona wyznaczono zastępczą wydajność prądową J_N = 40 mA i rezystancję wewnętrzną R_w = 100 Ω. Wyznacz wartość napięcia panującego na rezystancji obciążenia R_o = 200 Ω.
10. Zdefiniuj zasadę superpozycji. Do jakiej klasy obwodów nie może być zastosowana?
11. Co oznacza termin „dopasowanie energetyczne dla prądu stałego”?
12. Co to jest moc prądu stałego?
13. Korzystając z twierdzenia Thevenina wyznaczono zastępczą siłę elektromotoryczną E_T = 5 V i rezystancję wewnętrzną R_w = 50 Ω. Jaka moc wydzieli się w dołączonym oporniku o rezystancji 20 Ω, a jaka w przypadku opornika o rezystancji 50 Ω? W którym przypadku mamy do czynienia z dopasowaniem energetycznym?
14. Korzystając z twierdzenia Nortona wyznaczono zastępczą wydajność prądową J_N = 100 mA i rezystancję wewnętrzną R_w = 100 Ω. Jaka moc wydzieli się w dołączonym oporniku o rezystancji 100 Ω, a jaka w przypadku opornika o rezystancji 50 Ω? W którym przypadku mamy do czynienia z dopasowaniem energetycznym?

Zadania domowe

Zadanie 1



Rys. 1. Schemat układu

Dla układu przedstawionego na Rys. 1, wykorzystując zasadę Thevenina, wyprowadź (na symbolach ogólnych) wyrażenia pozwalające obliczyć wartości elementów schematu zastępczego: E_T i R_w oraz podaj wzór na napięcie U_o.

Wykonaj obliczenia dla następujących danych:

$$R_1 = a \cdot 50\ \Omega, \quad R_2 = a \cdot 100\ \Omega, \quad E_1 = a\ \mathrm{V}, \quad E_2 = 0{,}5 \cdot a\ \mathrm{V},$$

gdzie a oznacza liczbę odpowiadającą dwóm ostatnim cyfrom numeru albumu. W przypadku, gdy dwie ostatnie cyfry są zerami przyjmij a = 10.

Zadanie 2

Dla układu przedstawionego na Rys. 1, wykorzystując zasadę Nortona, wyprowadź (na symbolach ogólnych) wyrażenia pozwalające obliczyć wartości elementów schematu zastępczego: J_N i R_w oraz podaj wzór na napięcie U_o.

Wykonaj obliczenia z wykorzystaniem danych z zadania 1.